Rainer KAENDERS, Köln; Reinhard SCHMIDT, Engelskirchen

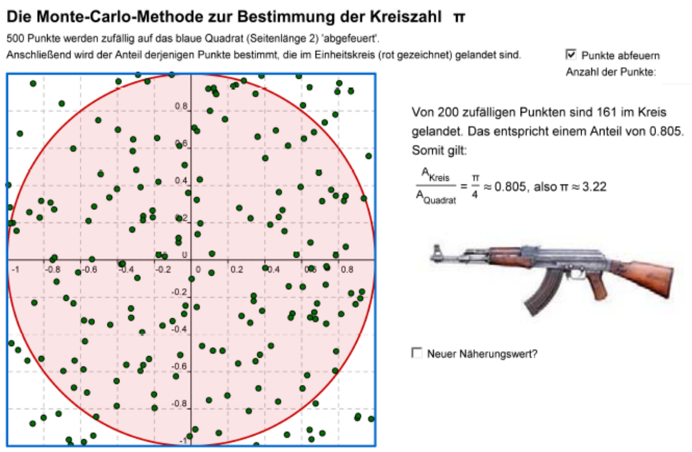
Beispiele, Perspektiven und Fragen zur Förderung mathematischer Begriffsentwicklung durch GeoGebra

Die dynamische Geometrie Software GeoGebra kann auf vielfältige Weise im Unterricht eingesetzt werden und damit die Begriffsentwicklung auf verschiedenen Niveaus fördern. In diesem Beitrag werden Alltagsbeispiele in Hinblick auf ihren möglichen Beitrag zur *mathematischen Bewusstheit*[1] (Kaenders & Kvasz, 2010) der Lernenden diskutiert. Diese Perspektive erlaubt die Einordnung der Beispiele je nach angestrebter Qualität der mathematischen Bewusstheit, so dass neben hilfreichen Einsatzmöglichkeiten auch Fragen über den förderlichen Einsatz der Software ins Blickfeld rücken. Diese Überlegungen und Fragen sollen zur Schärfung eines Profils des neu gegründeten GeoGebra Instituts Köln/Bonn (http://koeln.geogebra-institut.de) beitragen.

1. Einstiegsbeispiele

Was leistet GeoGebra für einen guten (Mathematik-)Unterricht? Wir betrachten drei Beispiele aus der unendlichen Fülle von GeoGebra-Applets:

Ein Klassiker ist die Illustration der Aussage ‚Die Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt' mit Hilfe dynamischer Geometrie. Eine solche Veranschaulichung ist einprägsam und überzeugend, unterdrückt jedoch häufig eher das Beweisbedürfnis als dass sie es fördert.



Applets zur Monte-Carlo-Methode sind ebenfalls repräsentativ für eine Reihe von Applets, die mathematische Sachverhalte ansprechend illustrieren. Erstaunlich ist dabei weniger, dass man mit der Monte-Carlo-Methode π annähern kann als vielmehr die schlechte Qualität dieser Näherung.

---

[1] Im Englischen ist dies ‚mathematical awareness'. In der angegebenen Veröffentlichung wurde das Begriffssystem noch mit ‚mathematisches Bewusstsein' übersetzt. Um eine mögliche Nähe zu Esoterik, verschiedensten Ideologien und bestimmten Bereichen der Psychologie zu vermeiden, haben wir uns für ‚mathematische Bewusstheit' entschieden.

Auch das Newtonverfahren lässt sich gut mit GeoGebra realisieren. Dabei kann mit Hilfe von GeoGebra der Zusammenhang zwischen dem Algorithmus und der Geometrie deutlich gemacht werden. Es bietet Gelegenheit experimentelle Erfahrungen mit der Approximation von Nullstellen zu bekommen und kann Anlass für weitere Fragestellungen sein.

Alle drei Applets gewährleisten, dass die SchülerInnen durch die Visualisierung mathematischer Sachverhalte und Verfahren mathematische Phänomene wahrnehmen. Die technischen Möglichkeiten von GeoGebra sind in dieser Hinsicht nahezu unbegrenzt - das alles ist wunderbar!

Aber was kann ein Programm wie GeoGebra in Hinblick auf mathematische Erkenntnisprozesse leisten?

2. Mathematische Bewusstheit

Was sind mögliche Qualitäten des Mathematikverständnisses der SchülerInnen? Eine Perspektive hierauf bietet das Begriffssystem der mathematischen Bewusstheit (Kaenders & Kvasz, 2010). Ganz bewusst unterscheiden wir die Bewusstheit eines Menschen von seinen Kompetenzen. Dafür gibt es viele gute Gründe, von denen Caleb Gattegnos einen ausdrückte durch: *Only awareness is educable in man!*

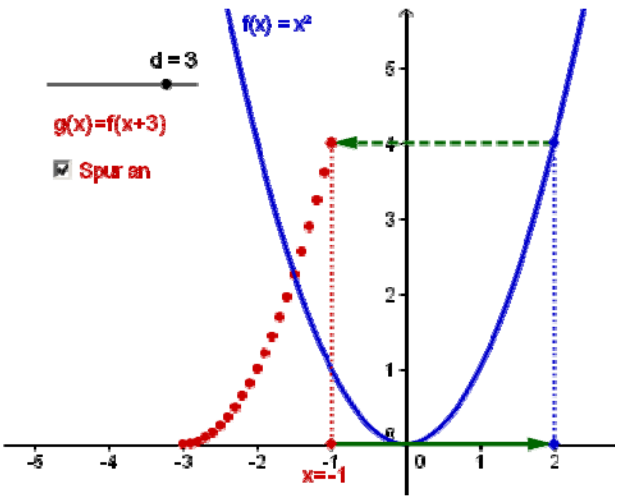
Zur Beschreibung mathematischer Bewusstheit werden verschiedene Qualitäten solcher Bewusstheit unterschieden: soziale, imitative, manipulative, instrumentelle, diagrammatische, intuitive, experimentelle, strategische, kontextuelle, argumentative, logische, theoretische Bewusstheit.

In unserem GeoGebra-Institut haben wir diskutiert, welche Beispiele für GeoGebra-Workshops geeignet sind und sind u.a. auf die Frage gestoßen, welchen Beitrag zur Begriffsentwicklung etwa eine Parabel mit Funktionsvorschrift $f(x)$, die per Schieberegler hin und her bewegt werden kann, leistet. Die dahinterstehende Frage ist: Wie sieht etwa der Graph zur Funktionsvorschrift $g(x)=f(x+3)$ aus? In (Kaenders et al., 2011) wurde dieses Beispiel schon vorher ausführlich und allgemeiner diskutiert.

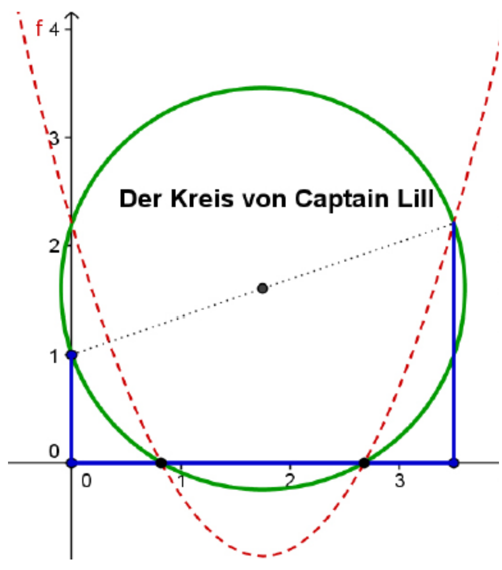
Diese Verschiebung des Graphen kann schlicht auf dem Niveau des Programms verstanden werden: Das Verschieben verursacht bei GeoGebra eine zu beobachtende Veränderung der Funktionsvorschrift (instrumentelle Bewusstheit). Die Schüler können mit verschiedenen Variablensubstitutionen und Verschiebungen experimentieren (experimentelle Bewusstheit). Wird durch eine Variablensubstitution eine bestimmte Verschiebung des Graphen intendiert, entsteht eine Strategie, wie dies zu bewerkstelligen ist (strategische Bewusstheit).

Zur Begriffsentwicklung liefert dies jedoch nur einen beschränkten Beitrag: Die SchülerInnen können über die Beobachtungen reden und der Zusammenhang zwischen Verschiebung und Variablensubstitution kann am Computer *nachvollzogen* werden (soziale und imitative Bewusstheit). Die Intuition '+*3*' ist '3 nach rechts' wird durch diese Variablensubstitution auf die Probe gestellt (intuitive Bewusstheit). Durch ein solches Schiebregler-Applet wird jedoch nicht deutlich, dass man mit einer Substitution $x'=x+3$ einen Punkt $(x–3, f(x))$ in der Ebene zu einem Punkt $(x', f(x'+3))$ umrechnen kann (manipulative Bewusstheit). Die Variablensubstitution wird nicht als Element in einem logischen Rahmen deutlich (logische Bewusstheit) und auch wird nicht deutlich, in welchem Rahmen die Verschiebung eines Graphen ein sinnvoller Begriff ist (theoretische Bewusstheit).

Alternativ zum bloßen Verschieben der Parabel per Schieberegler können wir uns den Sachverhalt in einem Kontext klarmachen: etwa mit Hilfe von Weg-Zeit-Diagrammen zweier Motorradfahrer, die im Abstand von 3 Minuten starten (kontextuelle Bewusstheit). Dies lässt sich leicht mit GeoGebra realisieren.



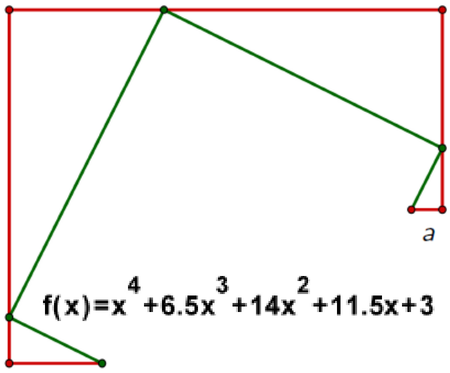
Wir können uns auch argumentativ dieses Zusammenhangs bewusst sein, wenn wir uns beispielsweise vorstellen, dass zur Berechnung von $g(x)$ die Funktionswerte von f jeweils drei Einheiten rechts von x *abgeholt* werden (argumentative und diagrammatische Bewusstheit). Schließlich können wir uns vergegenwärtigen, dass es sich eigentlich um eine Verschiebung des Koordinatensystems handelt, die im Rahmen der Bewegungen der Ebene logisch verstanden werden kann (logische Bewusstheit).



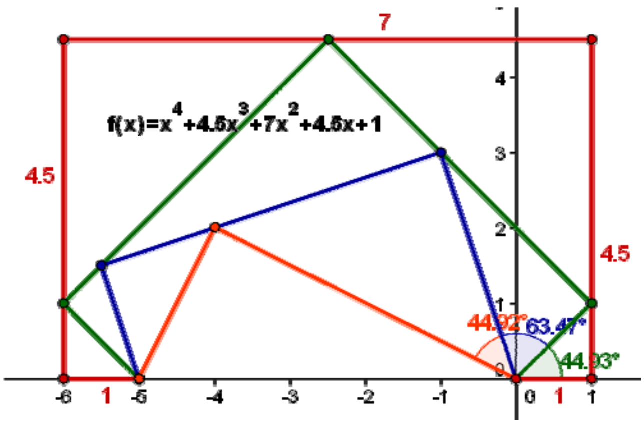
3. Captain Lills Entdeckungen

Ein GeoGebra-Applet zum Kreis von Captain Lill (Nullstellenbestimmung bei quadratischen Funktionen) kann als Katalysator vielfältiger mathematischer Tätigkeiten eingesetzt werden, und mathematische Bewusstheit wird in sehr unterschiedlichen Qualitäten gefördert.

Ausgehend von der Beobachtung eines Einzelfalls regt das Applet die SchülerInnen dazu an, Vermutungen über die Verallgemeinerbarkeit ihrer Beobachtung anzustellen. Diese Beobachtungen lassen sich auf sehr unterschiedlichen Wegen begründen, und in Abhängigkeit von diesen Begründungen können unterschiedliche Qualitäten der mathematischen Bewusstheit entstehen: Durch dieses Applet entstehen: imitative, instrumentelle, diagrammatische, intuitive, experimentelle, kontextuelle, argumentative Bewusstheit. Je nachdem, wie das Applet verwendet wird, kann auch strategische, manipulative und theoretische Bewusstheit erzeugt werden.



Die Methode von Lill bietet eine Vielzahl weiterer spanneder Forschungsanlässe. Die Methode lässt sich auf Polynome beliebigen Grades verallgemeinern und liefert schließlich sogar die Linearfaktorzerlegung von Polynomen (siehe Kalman, 2008).



4. Fragen und Diskussion

GeoGebra ist ein kraftvolles Instrument zur Förderung verschiedenster Qualitäten mathematischer Bewusstheit. Eine besondere Herausforderung besteht darin, GeoGebra so einzusetzen, dass die SchülerInnen mehr lernen, mehr selbst entdecken, mehr selbst vermuten, mehr selbst argumentieren, mehr selbst Theorie bilden, mehr selbst beweisen wollen und können.

Das GeoGebra Institut Köln/Bonn hat es sich zum Ziel gesetzt, dass die SchülerInnen mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen.

Literatur

Kaenders, R.H., Kvasz, L. (2010): Mathematisches Bewusstsein. In K. Lengnink & al. (Hrsg.): Mathematik verstehen - philosophische und didaktische Perspektiven. Siegen, Vieweg.

Kaenders, R.H., Kvasz, L., Weiss-Pidstrygach, Y. (2011): Recovering Mathematical Awareness by linguistic Analysis of Variable Substitution, CERME 7, Rzeszów.

Kalman D. (2008): Polynomia and Related Realms, Math. Association of America.